Matematică – Clasa a XIII-a

Semestrul I

Teme:

I. **INELE DE POLINOAME CU COEFICIENŢI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV (Q, R, C, Z_P)**
   a. Forma algebrică a unui polinom, funcţia polinomială, operaţii
   b. Teorema împărţirii cu rest; împărţirea polinoamelor
   c. Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout
   d. Rădăcini ale polinoamelor relaţiile lui Viète
   e. Rezolvarea ecuaţiilor algebrice cu coeficienţi în Z, Q, R, C

II. **PRIMITIVE**
   a. Primitivele unei funcţii
   b. Integrala nedefinită a unei funcţii
   c. Primitive uzuale

III. **INTEGRALA DEFINITĂ**
   a. Diviziuni ale unui interval [a,b], norma unei diviziuni
   b. Teorema de medie, teorema deexistenţă a primitivelor unei funcţii continue
   c. Formula Leibniz – Newton
   d. Metode de calcul al integralelor definite

IV. **APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE**
   a. Aria unei suprafeţe plane
   b. Volumul unui corp de rotaţie
   c. Calculul unor limite de şiruri folosind integrala definită.

Primitivele unei funcţii

Operaţia de aflare a primitivei unei funcţii este operaţia inversă derivării. Dacă se dă o funcţie $f(x)$ primitiva funcţiei se notează $F(x)$ şi verifică relaţia: $F'(x) = f(x)$.

Prin urmare primitiva funcţiei f este funcţia F a cărei derivată este funcţia f.

<u>Exemplu</u>:

Fie $f(x) = x^3$. Primitiva sa este: $F(x) = \frac{x^4}{4}$.

Verificare: $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}\left(x^4\right)' = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} \cdot x^{4-1} = x^3 = f(x)$. Prin urmare primitiva lui $f(x) = x^3$ este $F(x) = \frac{x^4}{4}$.

În general dacă $f(x) = x^n$ atunci $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$F'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot x^{n\cancel{+1}\cancel{-1}} = x^4 = f(x)$$

<u>Exemplu</u>:

1. $f(x) = 3x^5 \Rightarrow F(x) = \cancel{3} \cdot \frac{x^6}{\cancel{6}} = \frac{x^6}{2}$.

   Verificare: $F(x) = \left(\frac{x^6}{6}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(x^6\right)' = \frac{1}{2} \cdot 6x^5 = 3x^5 = f(x)$. Deci, $F'(x) = f(x)$.

2. $f(x) = x^9 \Rightarrow F(x) = \frac{x^{10}}{10}$

   $$F'(x) = \left(\frac{x^{10}}{10}\right)' = \frac{1}{10} \cdot \left(x^{10}\right)' = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} \cdot x^{10-1} = x^9 = f(x)$$

3. $f(x) = 2x^{13} \Rightarrow F(x) = \cancel{2} \cdot \frac{x^{14}}{\cancel{14}} = \frac{x^{14}}{7}$

   $$F'(x) = \left(\frac{x^{14}}{7}\right)' = \frac{1}{7} \cdot 14x^{14-1} = \frac{1}{\cancel{7}} \cdot \cancel{14} \cdot x^{13} = 2 \cdot x^{13} = f(x)$$

Procedând în mod asemănător se pot stabili primitivele unor funcţii elementare.

$$f(x)=e^x; F(x)=e^x; F'(x)=(e^x)'=e^x=f(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{x}; F(x)=\ln x; F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}=f(x)$$

$$f(x)=\cos x; F(x)=\sin x; F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$$

$$f(x)=\sin x; F(x)=-\cos x; F'(x)=(-\cos x)'=\sin x=f(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}; F(x)=tgx; F'(x)=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}=f(x)$$

$$f(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}; F(x)=ctgx; F'(x)=(ctgx)'=-\frac{1}{\cos^2 x}=f(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}; F(x)=\sqrt{x}; F'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x)$$

$$f(x)=-\frac{1}{x^2}; \mathrm{F}(x)=\frac{1}{x}; F'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}=f(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; F(x)=\arcsin x; F'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=f(x)$$

$$f(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; F(x)=\arccos x; F'(x)=(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=f(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}; F(x)=arctgx; F'(x)=(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$$

Proprietăţi

P_1: *Dacă o funcţie are 2 primitive atunci ele diferă printr-o constantă.*

Demonstraţie:

Fie $G(x)$ şi $F(x)$ două primitive ale funcţiei $f(x)$. Ţinând seamă de definiţie avem $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$.

Dacă scădem membru cu membru cele două egalităţi obţinem:

$F'(x)-G'(x)=0$

$[F(x)-G(x)]'=0$ (dacă derivata unei funcţii este 0 atunci funcţia este o constantă)

$$F(x) - G(x) = C$$

$$F(x) = G(x) + C$$

Concluzie:

O funcţie are o infinitate de primitive (putem da constantei c o valoare arbitrară).

Mulţimea primitivelor unei funcţii $f(x)$ se notează $\int f(x)dx$ şi se numeşte **integrala nedefinită** a funcţiei $f(x)$.

Prin urmare avem:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Ţinând seama de relaţia dintre primitivă şi integrală avem:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int C dx = Cx + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

P$_2$: *Primitiva sumei a două funcţii este egală cu suma primitivelor.*

Demonstraţie:

Fie $F(x)$ şi $G(x)$ primitivele funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ atunci avem

$$F'(x) = f(x)$$
$$G'(x) = g(x)$$

Dacă adunăm membru cu membru aceste egalităţi atunci obţinem:

$$F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

sau

$$[F(x) + G(x)]' = f(x) + g(x)$$

ţinând seama de definiţia primitivei rezultă că $F(x) + G(x)$ este o primitivă a funcţiei $f(x) + g(x)$.

Ţinând seama de relaţia

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

avem

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}$$
$$\int [f(x) + g(c)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Demonstraţie:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot F(x) + C = k[F(x) + C'] = k\int f(x)dx$$
$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C = [F(x) + C'] + [G(x) + C''] = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

P$_3$: $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$

Demonstraţie:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \overset{P_2}{=} \int \alpha f(x)dx + \int \beta g(x)dx \overset{P_1}{=} \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$$

Exerciţii rezolvate:

1. $\int (3e^x + 4\cos x)dx = 3\int e^x dx + 4\int \cos x dx = 3e^x + 4\sin x + C$

2. $\int 3x^3 dx = 3\int x^3 dx = 3\frac{x^{3+1}}{3+1} + C = 3\frac{x^4}{4} + C$

3. $\int (6x^3 + 2x^2 + 5x + 1)dx = 6\int x^3 dx + 2\int x^2 dx + 5\int x dx + 1 = 6\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + x + C$

4. $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 2)dx = 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 2\int x dx + 2 = \cancel{4}\frac{x^4}{\cancel{4}} + \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + 2x + C =$

$= x^4 + x^3 + x^2 + 2x + C$

5. $\int \left(\frac{3}{x} + 4\sin x + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{6}{1+x^2} \right) dx = 3\int \frac{1}{x} dx + 4\int \sin x dx + 6\int \frac{1}{1+x^2} dx =$

$= 3\ln|x| - 4\cos x + 5\arcsin x + 6 arctg x + C$

Exerciţii propuse:

1. $\int \left(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 5\right) dx$
2. $\int \left(6x^5 + 10x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 8x + 2\right) dx$
3. $\int \left(3e^x + 4\sin x + 4\cos x\right) dx$
4. $\int \left(\frac{3}{x} + 4e^x + 5\sin x + 6\cos x \right) dx$
5. $\int \left(\frac{5}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{6}{2\sqrt{x}} \right) dx$
6. $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + 6e^x \right) dx$