Matematică – Clasa a XII-a

Semestrul I

Teme:

I. **CONTINUITATE**
   a. Interpretarea grafică a continuităţii.
   b. Proprietatea lui Darboux.

II. **DERIVABILITATE**
   a. Funcţii derivabile, interpretare geometrică.
   b. Calculul derivatelor, proprietăţile derivatelor.
   c. Extreme, teoremele lui Férmat, Rolle, Lagrange.
   d. Regulile lui l'Hospital.
   e. Rolul derivatei I, II în studiul unei funcţii.

III. **LEGI DE COMPOZIŢIE**

Calculul derivatelor, proprietăţile derivatelor

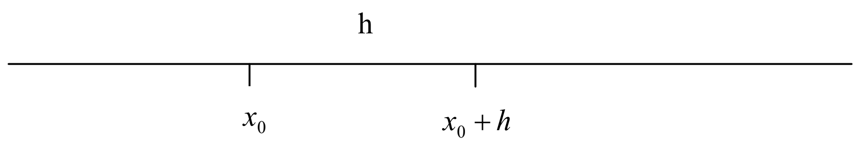
Variaţia unei funcţii

Fie funcţia $f(x) = x^2$.

Să presupunem că x=2 atunci $y = f(2) = 2^2 = 4$.

Dacă $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^2 = 0$.

Dacă valoarea funcţiei date în punctul x_0 este $y_0 = f(x_0) = x_0^2$ ce valoare va avea această funcţie într-un punct apropiat lui x_0 şi anume $x_0 + h$.



Valoarea funcţiei în punctul $x_0 + h$ este $y = f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2$.

<u>Exemplu:</u>

$$x_0 = 2$$
$$x_0 + h = 2 + h$$
$$f(x_0 + h) = (2 + h)^2$$

Se numeşte **variaţia funcţie în punctul** 2 diferenţa valorilor pe care le ia această funcţie în cele două puncte. Notăm variaţia Δy şi avem:

$$\Delta y = f(2+h) - f(2) = (2+h)^2 - 2^2 = 4 + 4h + h^2 - 4 = h^2 + 4h$$

În general în punctul x_0 variaţia funcţiei va fi:

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2 = h^2 + 2x_0 h$$

Prin urmare variabila x are o variaţie h ($x_0 + h - x_0 = h$) şi scriem $\Delta x = h$ iar variabila y are variaţia $\Delta y = h^2 + 2x_0 h$.

Să calculăm raportul dintre variaţia funcţiei şi variaţia variabilei x şi vom obţine:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^2 + 2x_0 h}{h} = \frac{\cancel{h}(h + 2x_0)}{\cancel{h}} = h + 2x_0$$

Acest raport depinde de creşterea h a variabilei x. Dacă variaţia variabilei x tinde la 0 atunci avem:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (h + 2x_0) = 2x_0$$

$2x_0$ se numeşte **derivata funcţiei f(x) în punctul** x_0**.**

Deci, derivata unei funcţii într-un punct este limita raportului dintre creşterea funcţiei şi creşterea variabilei când aceasta din urmă tinde la 0.

<u>Exemple:</u>

A. $f(x) = x^n$

$$f(x+h) = (x+h)^n$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - \cancel{x^n}$$

$$\Delta y = nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

$$\Delta x = \cancel{x} + h - \cancel{x} = h$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right)}{\cancel{h}} = nx^{n-1}$$

Prin urmare $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. S-a folosit scrierea prescurtată a derivatei unei funcţii $f'(x) = \left(x^n\right)'$.

<u>Exemplu</u>:

A.

$$\left(x^3\right)' = 3x^{3-1} = 3x^2 \quad \text{(n=3)}$$

$$\left(x^5\right)' = 5x^{5-1} = 5x^4 \quad \text{(n=5)}$$

$$x' = 1 \bullet x^{1-1} = 1 \bullet x^0 = 1$$

B.

$$f(x) = a$$

$$f(x+h) = a$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = a - a = 0$$
$$(a)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Derivata unei constante este 0.

Pornind de la definiţie se calculează toate derivatele funcţiilor elementare.

$$\left(e^x\right)' = e^x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x} \qquad \left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \qquad \left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x \qquad \left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Proprietăţile derivatei

a. $\left(f+g\right)' = f' + g'$

Derivata sumei este egală cu suma derivatelor (o sumă se derivează termen cu termen).

<u>Demonstraţie</u>

$$k = f + g$$
$$k(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$$
$$k(x) = f(x) + g(x)$$

atunci

$$\begin{aligned} k(x+h) - k(x) &= f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x) = \\ &= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)] = \\ &= \Delta f + \Delta g \end{aligned}$$

Deci, $\Delta k = \Delta f + \Delta g$.

$$(f+g)' = k' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f' + g'$$

Prin urmare, $(f+g)' = f' + g'$.

b. Derivata unei constante împărţită cu o funcţie este constanta înmulţită cu derivata funcţiei.

Fie

$$\begin{aligned}
&g(x) = k \bullet f(x) \\
&g(x+h) = k \bullet f(x+h) \\
&\Delta g = g(x+h) - g(x) = k \bullet f(x) - k \bullet f(x) = \\
&= k \bullet [f(x+h) - f(x)] = k \bullet \Delta f
\end{aligned}$$

Avem:

$$(k \bullet f)' = g' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k \bullet \Delta f}{\Delta x} = k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = k \bullet f'$$

Deci,

$$(k \bullet f)' = k \bullet f'$$

În acelaşi mod se demonstrează relaţiile

$$(f \bullet g)' = f'g + fg'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Exemple:

1. $(5x^4)' = 5 \bullet (x^4)' = 5 \bullet 4 \bullet x^{4-1} = 20x^3$

Se înmulţeşte exponentul cu coeficientul şi se scade o unitate la exponent.

$$(6x^3)' = 18x^2 \qquad (4x)' = 4$$
$$(15x^2)' = 30x$$

2. $(4x^3 + 2x^2 + 3x + 1)' = (4x^3)' + (2x^2)' + (3x)' + 1' =$

$= 4(x^3)' + 2(x^2)' + 3x' + 1' = 4 \bullet 3 \bullet x^{3-1} + 2 \bullet 2x^{2-1} + 3 \bullet 1 + 0 =$

$=12x^2+4x+3$

3. $(3e^x+5\sin x+4\cos x)'=(3e^x)'+(5\sin x)'+(4\cos x)'=$

$=3\bullet(e^x)'+5\bullet(\sin x)'+4\bullet(\cos x)'=3\bullet e^x+5\cos x-4\sin x$

4. $(3\ln x+5\arcsin x+4arctgx)'=$

$=(3\ln x)'+(5\arcsin x)'+(4arctgx)'=$

$=3(\ln x)'+5(\arcsin x)'+4(arctgx)'=$

$=3\bullet\frac{1}{x}+5\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+4\frac{1}{1+x^2}$

5. $(\sin x\bullet\cos x)'=(\sin x)'\bullet\cos x+(\cos x)'\bullet\sin x=$

$=\cos x\bullet\cos x-\sin x\bullet\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

6. $(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\bullet(\cos x)'}{\cos^2 x}=$

$=\frac{\cos x\bullet\cos x+\sin x\bullet\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

7. $(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\bullet\sin x-\cos x\bullet(\sin x)'}{\sin^2 x}=$

$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Exerciţii rezolvate:

a. $f(x)=x^4-x^2+1$

$f'(x)=(x^4)'-(x^2)'+1'=4x^{4-1}-2x^{2-1}+0=4x^3-2x$

b. $f(x)=e^x+\ln x+\ln\pi$

$f'(x)=(e^x)'+(\ln x)'+(\ln\pi)'=e^x+\frac{1}{x}$

c. $f(x)=arctgx+arctg2$

$f'(x)=(arctgx)'+(arctg2)'=\frac{1}{1+x^2}+0=\frac{1}{1+x^2}$

d. $f(x)=\arcsin x+\arccos x$

$f'(x)=(\arcsin x)'+(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} = 0$$

e. $f(x) = arctgx + arcctgx$

$$f'(x) = (arctgx + arcctgx)' = (arctgx)' + (arcctgx)' =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = 0$$

f. $f(x) = e^x \bullet \sin x$

$$f'(x) = (e^x \bullet \sin x)' = (e^x)' \bullet \sin x + e^x \bullet (\sin x)' =$$

$$= e^x \bullet \sin x + e^x \bullet \cos x = e^x \bullet (\sin x + \cos x)$$

g. $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)' \bullet \left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right) \bullet \left(1+\sqrt{x}\right)'}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right) \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}} \bullet \cancel{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cancel{\sqrt{x}} \bullet \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\left(1+\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

h. $f(x) = 2 \bullet e^x \bullet \cos x$

$$f'(x) = 2(e^x \bullet \cos x)' = 2(e^x)' \cos x + 2e^x (\cos x)' =$$
$$= 2e^x \cos x + 2e^x(-\sin x) = 2e^x(-\sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

i. $f(x) = \ln(\ln x)$

$$f'(x) = \left[\ln(\ln x)\right]' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

j. $f(x) = \ln(\sin x)$

$$f'(x) = \left[\ln(\sin x)\right]' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

k. $f(x) = \ln\left(tg\frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = \left[\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)\right]' = \frac{\left(tg\frac{x}{2}\right)'}{tg\frac{x}{2}} = \frac{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\cos^2\frac{x}{2}}}{tg\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\bullet tg\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos^{\cancel{2}} x\bullet\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cancel{\cos\frac{x}{2}}}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\bullet\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

Exerciţii propuse:

Să se deriveze:

1. $f = 3x^3 + 2x^2 + 1$

   $f = 5x^4 - 6x^2 + 2x + 2$

   $f = 4x^5 + 6x^3 - 2x^2 - x$

   $f = 5x^2 + 2x + 2$

2. $\left(e^x \sin x\right)'$

   $\left(e^x \cos x\right)'$

   $\left(e^x \ln x\right)'$

   $\left(e^x tgx\right)'$

   $\left(x^2 \sin x\right)'$

   $\left(x^3 \arcsin x\right)'$

   $\left(x^4 \ln x\right)'$

   $\left(x\sqrt{x}\right)'$

   $\left(x^3\sqrt{x}\right)'$

   $\left(\sin x\bullet\arcsin x\right)'$

   $\left(x^2 arctgx\right)'$