Matematică – Clasa a XI-a

Semestrul I

Teme:

I. MATEMATICI FINANCIARE

a. Elemente de calcul financiar (procente, dobânzi, T.V.A.)
b. Interpretarea datelor statistice (medii, dispersii)
c. Variabile aleatoare

II. GEOMETRIE

a. Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan
b. Distanţa dintre două puncte în plan
c. Calcule de distanţe şi arii.

III. ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL

a. Mulţimi de matrice
b. Operaţii cu matrice
c. Determinanţi, proprietăţi
d. Sisteme de ecuaţii liniare
e. Aplicaţii

III. **Elemente de calcul matriceal**

a. Mulţimi de matrice

Matricea este un tablou de elemente. Acest tablou este format din linii şi coloane.

Elementele liniilor sunt scrise pe orizontală, elementele coloanelor sunt scrise pe verticală.

Exemplu:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Coloana I} & \text{Coloana II} & \text{Coloana III}\end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Linia I} \\ \longrightarrow \text{Linia II} \end{array} \end{array}$$

Această matrice are 2 linii şi 3 coloane. Elementele liniei întâi sunt: 1, 2, 3. elementele liniei a II-a sunt: 4, 5, 6.

Elementele coloanei I sunt: 1, 2.

Un element al matricei se notează cu ajutorul simbolurilor a_{ij} unde i indică linia iar j coloana.

<u>Exemplu:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 4 \qquad a_{21} = 2$$

$$a_{12} = 0 \qquad a_{22} = 4$$

$$a_{13} = 3 \qquad a_{23} = 1$$

Matricea A are 2 linii şi 3 coloane şi vom nota $A(2 \times 3)$. În general matricea $A(m \times n)$ este matricea care are m linii şi n coloane.

Matricele la care numărul liniilor este egal cu numărul coloanelor se numeşte **matrice pătratică**.

Matricea care are toate elementele egale cu 0 se numeşte **matricea nulă.**

Exemplu:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Numărul liniilor este egal cu numărul coloanelor şi avem n=3. vom scrie $A(3\times 3)$ care este o matrice pătratică de ordinul 3.

2. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

O este matricea nulă.

3. Matricea opusă

Se numeşte **matrice opusă** unei matrice A, matricea care se notează – A şi care au elementele egale şi de semne contrare cu matricea A.

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exerciţii rezolvate:

1) Daţi exemple de matrice pătratică de ordinul II $A = (2\times 2)$
2) Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Să se construiască matricea opusă – A.
3) Să se alcătuiască o matrice cu 2 linii şi 3 coloane şi să se scrie elementele.

Rezolvare:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

2) $-A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -3\\ -2 & -3 & -2\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$

$$a_{11}=1 \qquad a_{21}=2$$

$$a_{12}=4 \qquad a_{22}=3$$

$$a_{13}=3 \qquad a_{23}=2$$

Exerciţii propuse:

1) Să se construiască o matrice pătratică de ordinul III şi apoi să se scrie elementele $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$.
2) Să se alcătuiască o matrice pătratică de ordinul II având elementele 0.

Generalizare

Se numeşte **matrice** cu m linii şi n coloane o **funcţie** $A: M\times N\to C$ unde: M şi N sunt mulţimile:

$M=\{1,2,...,m\}$;
$N=\{1,2,...,n\}$

C – este mulţimea numerelor complexe

Funcţia A poate fi reprezentată prin tabloul:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm}\end{pmatrix}$$

care are m linii şi n coloane.

Numerele a_{ij} se numesc **elementele matricei A** şi se află pe linia i şi coloana j.

Pentru matrice se poate folosi şi notaţia

$$A=(a_{ij}), i=1,2,...,m; j=1,2,...,n.$$

Vom nota cu $M_{m,n}(\mathbb{C})$ mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane având elemente numere complexe. $M_{m,n}(\mathbb{R})$ va fi mulţimea matricelor cu elemente numere reale iar $M_{m,n}(\mathbb{Q})$ va fi mulţimea matricelor cu elemente numere raţionale, etc. Dacă $m=n$ vom nota matricea $M_{n,n}(\mathbb{C})$ mai simplu $M_n(\mathbb{C})$ cu acelaşi număr de linii şi coloane.

<u>Exemple</u>:

1) Dacă $m=1$ vom avea matricea $A=(a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad ... \quad a_{1n})$ care se numeşte **matrice linie** cu n coloane şi o linie.
2) Dacă $n=1$ vom avea o matrice cu m linii şi o coloană şi se numeşte **matrice coloană** având forma: $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.
3) Dacă $m=n$ matricea va avea n linii şi n coloane şi se numeşte **matrice pătratică** de ordinul n. Într-o matrice pătratică elementele de pe linia i şi coloana i formează **diagonala principală**.

<u>Observaţie</u>: Numărul de linii şi coloane ale unei matrice se numeşte **tipul matricei.**

<u>Exemplu</u>: $M_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt matrice de tipul (m,n) având m linii şi n coloane.

Egalitatea matricelor

Două matrice A şi B de acelaşi tip (m,n) vor fi elemente ale mulţimii $M_{m,n}(\mathbb{C})$. Dacă $A=(a_{ij})$şi $B=(b_{ij})$ se acelaşi tip (m,n) sunt egale scriem: $A=B$ şi vom avea $a_{ij}=b_{ij}$ pentru orice $i=1,2,...,m$ şi $j=1,2,...,n$.

Egalitatea $a_{ij} = b_{ij}$ exprimă faptul că două matrice A şi B de acelaşi tip (m,n) sunt egale dacă elementele care le corespund sunt egale.

<u>Exemplu:</u>

Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ de tip $(2,4)$ şi matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & y & 2 & 5 \end{pmatrix}$ dacă $x = 4$ şi $y = 1$.

b. Operaţii cu matrice

În general o matrice cu 2 linii şi 3 coloane se scrie:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

primul indice arată linia şi indicele al II-lea arată coloana.

Adunarea matricelor

Pentru a aduna două matrice din aceeaşi linie şi aceeaşi coloană.

<u>Exemplu</u>:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 2+4 & 3+5 \\ 3+6 & 4+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 3-3 & 4-4 & 5-5 \\ 2-2 & 1-1 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Dacă o matrice se adună cu opusa sa se obţine matricea nulă. În general se consideră matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Exerciţii rezolvate

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2-2 & 3-4 \\ -6+5 & 5-6 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 4-8 \\ 5-3 & -7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Generalizare

Adunarea matricelor

Fie A, B două matrice de acelaşi tip (m,n) adică $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Dacă $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$ atunci $\boxed{A + B = C}$; $C = (c_{ij})$ este suma matricelor A şi B şi va fi de acelaşi tip (m,n), $C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ adunarea efectuându-se după regula: $\boxed{a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}, \forall i, j}$.

Ultima relaţie exprimă faptul că la adunarea matricelor (de acelaşi tip) se adună elementele a_{ij} cu b_{ij} care le corespund şi se obţine elementul sumă c_{ij} din linia i şi coloana j.

Exemplu:

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ de tip $(2,3)$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de tip $(2,3)$ suma

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = C$$

unde de exemplu: $a_{11}+b_{11}=1+2=3=c_{11}$.

Proprietăţi ale adunării matricelor

1. *Adunarea este comutativă*, adică oricare ar fi matricele $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ avem: $A+B=B+A$ deoarece dacă $A=(a_{ij})$ şi $B=(b_{ij})$ atunci

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=B+A$$

2. *Adunarea este asociativă*, aducă oricare ar fi matricele $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ avem:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

pentru că dacă $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ şi $C=(c_{ij})$ pentru $1 \le i \le m$, $\forall i=1,2,...,m$ şi $\forall j=1,2,...,n$, $1 \le j \le n$ vom avea: $(A+B)+C=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}$ şi $A+(B+C)=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}), \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ adică adunarea este asociativă.

3. *Matricea de tip* (m,n) *cu toate elementele nule se numeşte* **matricea zero** *şi se notează* $O_{m,n}$.

Exemplu:

$O_{2,3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este **matricea nulă cu 2 linii şi 3 coloane**. Vom avea $A_{m,n}+O_{m,n}=O_{m,n}+A_{m,n}=A_{m,n}$.

4. *Orice matrice* $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ *are un element opus notat cu* $-A=-(a_{ij})$ *având proprietatea:* $A+(-A)=(-A)+A=O_{m,n}$. Într-adevăr, dacă $A=(a_{ij})$ şi $-A=-(a_{ij})$, $1 \le i \le m$ şi $1 \le j \le n$ avem $A+(-A)=(a_{ij}-a_{ij})=O_{ij}=O_{m,n}$ şi conform relaţiei 1. avem şi $(-A)+A=O_{m,n}$.

Exemplu:

Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ şi $-A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ atunci $A+(-A)=O_{2,2}$.

Observaţie:

Se constată că elementele matricei – A sunt aceleaşi cu cele ale matricei A dar cu semn contrar.

Exerciţii rezolvate:

Se dau matricele: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Să se calculeze sumele: $(A+B)+C$, $A+(B+C)$.

$$(A+B)+C=\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+1 & 2+5\\ 3+0 & 4+6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+1 & 7+1\\ 3+2 & 10+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 5 & 12\end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1+1 & 5+1\\ 0+2 & 6+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 6\\ 2 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+2 & 6+2\\ 2+3 & 8+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 5 & 12\end{pmatrix}$$

Exerciţii propuse:

Se dau matricele: $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 3 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Să se calculeze: $(A+B)+C$, $A+(B+C)$.

Înmulţirea matricelor cu un scalar

Prin scalar înţelegem un număr real. Pentru a înmulţi o matrice cu un număr real se înmulţesc pe rând toate elementele matricei cu acel număr.

<u>Exemplu</u>:

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$ şi $\alpha=2$.

$$\alpha\bullet A=2\bullet\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 6 & 8 & 4\end{pmatrix}$$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ şi $\alpha=1$.

$$\alpha\bullet A=1\bullet\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1 & 1\cdot 2\\ 1\cdot 2 & 1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

Prin urmare $1\bullet A=A$. Prin înmulţirea cu 1 matricea nu se schimbă.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ şi $\alpha=0$.

$$\alpha\bullet A=0\bullet\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1 & 0\cdot 2\\ 0\cdot 4 & 0\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$$

Prin înmulţirea cu 0 se obţine matricea nulă.

4. $5\bullet\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 0 & 5\cdot 0\\ 5\cdot 0 & 5\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=5\bullet O=O$

Prin înmulţirea cu orice număr real a unei matrice nule se obţine matricea nulă.

Generalizare

Fie $A=(a_{ij})$ matrice de tip (m,n) şi a un număr complex. Definim $B=(b_{ij})$ cu elementele date de $b_{ij}=a\cdot a_{ij}$, matricea B, $B=a\cdot A$ este matricea produs dintre scalarul a şi matricea A, iar $a\cdot A$ se numeşte **înmulţirea cu scalari** (la stânga).

Exemplu:

Dacă $a=3$ şi $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ atunci $a\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 6 & -3 & 9\end{pmatrix}$.

Proprietăţi ale înmulţirii cu scalari

1. Dacă $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci $1\cdot A=A$.
2. Dacă $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $a,b\in\mathbb{C}$ atunci: $(a+b)A=aA+bA$.
3. Dacă $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $a,b\in\mathbb{C}$ atunci: $(a\cdot b)A=a(b\cdot A)$.
4. Dacă $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $a\in\mathbb{C}$ atunci: $a(A+B)=aA+aB$.
5. Dacă $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B\in M_{n,p}(\mathbb{C})$ cu $a\in\mathbb{C}$ atunci avem: $a(AB)=(aA)\cdot B=A\cdot(a\cdot B)$.

Exerciţii rezolvate:

Să se calculeze

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 9\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 6 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 9\\ 12 & 8 & 16\end{pmatrix}$$

Exerciţii propuse:

1. $4\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

2. $3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

3. $4\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

Înmulţirea matricelor

Pentru a afla elementele matricei produs $C = A\cdot B$ se efectuează pe rând produsul dintre elementele liniei i a matricei A cu elementele coloanei j a matricei B şi se face suma produselor obţinute. Suma produselor obţinute astfel ne dă elementul c_{ij} al matricei produs.

<u>Exemplu</u>:

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot 4+3\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot 5+3\cdot 2\\ 1\cdot 2+2\cdot 4+1\cdot 1 & 1\cdot 3+2\cdot 5+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 17\\ 11 & 15\end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$
$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}$$
$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31}$$
$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}$$

Generalizare

Dacă $A = (a_{ij})$ de tip (m,n), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ şi $B = (b_{ij})$ de tip (n,p) $1 \le i \le n$, $1 \le j \le p$. Definim matricea $C = (c_{ij})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le p$ de tip (m,p) ale cărei elemente sunt date de egalităţile:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

pentru $\forall i = 1,2,...,m$ şi $\forall j = 1,2,..., p$

avem deci $A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{m,p}$ care înseamnă o condiţie de înmulţirea matricelor:

Două matrice A şi B pot fi înmulţite dacă numărul de coloane din A este egal cu numărul de linii din B.

Relaţia: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ exprimă faptul că se înmulţesc liniile cu coloanele.

<u>Exemplu</u>:

$A_{3,2} \cdot B_{2,3} = C_{3,3}$ adică dacă matricea A are 3 linii şi două coloane, matricea rezultat va avea 3 linii şi 3 coloane.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ atunci matricea

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ unde

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ c_{13} &= a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} \end{aligned}\right\} \text{ elementele liniei 1din matricea C}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{21} &= a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \\ c_{23} &= a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23} \end{aligned}\right\} \text{ elementele liniei 2 din matricea C}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{31} &= a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} \\ c_{32} &= a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} \\ c_{33} &= a_{31}\cdot b_{13} + a_{32}\cdot b_{23} \end{aligned}\right\} \text{ elementele liniei 3 din matricea C}$$

<u>Exemplu</u>:

1. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ matricea C va fi de tip $(2,2)$, într-adevăr:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-1)\cdot 0+2\cdot(-1) & 1\cdot 4+(-1)\cdot 0+2\cdot 1 \\ 0\cdot 1+4\cdot 0+(-3)\cdot(-1) & 0\cdot 4+4\cdot 0+(-3)\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1-2 & 4+2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}=C$$

2. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ de tip $(2,2)$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de tip $(2,3)$ matricea C va fi de tip $(2,3)$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 1+3\cdot 2 & 2\cdot(-1)+3\cdot(-1) & 2\cdot 0+3\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1-2 & -1+1 & 0-1 \\ 2+6 & -2-3 & 0+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}=C_{2,3}.$$

Proprietăţi ale înmulţirii matricelor

1. *Înmulţirea este asociativă* adică $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ şi $C \in M_{m,q}(\mathbb{C})$ adică respectându-se condiţiile de înmulţire a matricelor:

$$(A_{m,n} \cdot B_{n,p}) \cdot C_{p,q} = P_{m,p} \cdot C_{p,q} = R_{m,q}$$

adică dacă A este de tip (m,n), B este de tip (n,p) şi C este de tip (m,q) atunci matricea $A_{m,n} \cdot B_{n,p} \cdot C_{p,q}$ va fi de tip (m,q).

2. *Înmulţirea este distributivă la stânga*:

   $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ unde $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ şi $C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$.

3. *Înmulţirea este distributivă la dreapta:*

   $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ unde $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ respectându-se condiţiile de înmulţire a matricelor.

4. *Înmulţirea matricelor pătratice* $M_n(\mathbb{C})$ *de ordin n există un element neutru faţă de înmulţire notat* I_n *şi care are forma:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

cu elementele de pe diagonala principală $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ *şi celelalte egale cu zero.*

Oricare ar fi $A \in M_n(\mathbb{C})$ vom avea

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

I_n poate fi scrisă $I_n = (\delta_{ij})$ unde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Exerciţii propuse

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Transpusa unei matrice

Fie $A = (a_{ij})$ matrice de tip (m,n). Matricea ${}^tA = a_{kl}$ de tip (n,m) se numeşte **transpusa matricei A** şi transformă liniile matricii A în coloane (iar coloanele în linii).

<u>Exemplu</u>:

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ de tip $(2,3)$ transpusa matricei A, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ este de tip $(3,2)$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ transpusa matricei A este ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Proprietăţi ale transpusei ${}^tA$

1. Dacă $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ avem:

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

2. Dacă A este de tip (m,n) şi B de tip (n,p) atunci:

$${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$$

3. Dacă A este de tip (m,n) şi a un scalar avem: ${}^t(a \cdot A) = a \cdot {}^tA$.

Aplicaţii, exemple:

Fie matricele A şi B de acelaşi tip.

1. Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}$ atunci $A=B$ dacă $x=1, y=-1, u=0, v=2$.

2. Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$. Calculaţi:

   a. $(A+B)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

   b. $A-B=A+(-B)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

   c. Calculaţi $A+2B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\\ -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$

   d. Calculaţi

$$2(A+B)=2A+2B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\\ -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

3. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ de tip $(3,2)$ şi $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ de tip $(2,1)$ matricea $A\cdot B=C$ va fi de tip $(3,1)$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0\\ 0+1\\ 2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

4. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ efectuaţi

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot 0+2\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 2\\ 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

5. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ transpusa ${}^tA$ a matricei A va fi: ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

6. Fie matricea pătratică $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. **Urma** matricei A notată cu trA este suma elementelor de pe diagonala principală, adică: $trA=1+2=3$.

Exerciţii propuse

1. Determinaţi elementele x, y, z dacă:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 1 & z\\ y & -1 & 3\end{pmatrix}$$

2. Efectuaţi suma $A+B$ dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

   Calculaţi $A-B=?$

   Calculaţi $3\cdot A+2\cdot B=?$

   Efectuaţi suma $A+I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

3. Efectuaţi $A\cdot B$ unde $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Verificaţi faptul că $B\cdot I_2=B$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. Determinaţi matricea X din ecuaţia: $X=A+B$.

5. Calculaţi $A+B+2C$ unde: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

6. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Calculaţi $A^2=A\cdot A$.