Matematică – Clasa a X-a

Semestrul I

Teme:

I. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

a. Cercul trigonometric, definirea funcţiilor trigonometrice pe cerc.

b. Formule de reducere la primul cadran.

c. Formule trigonometrice pentru $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$.

II. APLICAŢII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ

a. Produsul scalar a 2 vectori.

b. Teorema cosinusului dreptunghic

c. Rezolvarea triunghiului dreptunghic

d. Raza cercului circumscris, raza cercului înscris unui triunghi

e. Formule pentru calculul ariei unui triunghi.

III. MULŢIMI DE NUMERE

a. Numere reale

b. Radicali, operaţii cu radicali.

c. Noţiunea de logaritm, proprietăţi ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operaţia de logaritmare.

d. Mulţimea $\mathbb{C}$. Numere complexe sub forma algebrică conjugatul, operaţii cu numere complexe.

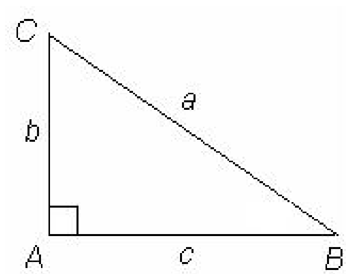
e. Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi complecşi. Ecuaţii bipătrate.

f. Numere complexe sub forma trigonometrică.

g. Rădăcinile de ordin n ale unui număr complex. Ecuaţii binome.

Elemente de trigonometrie

Să considerăm triunghiul dreptunghic ABC având $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B})$, $m(\widehat{C}) < 90^\circ$. Unghiul A se numeşte **unghi drept** iar unghiurile B şi C sunt **unghiuri ascuţite** (fig. 1).



Latura care se opune unui unghi este diferită de celelelte două laturi ale unghiului. Prin urmare latura opusă unui unghi nu este latura unghiului.

Vom nota:

a latura opusă unghiului A

b latura opusă unghiului B

c latura opusă unghiului C

Latura opusă unghiului drept A se numeşte **ipotenuză** iar celelalte două laturi (b, c) se numesc **catete**.

Vom defini o funcţi care să evalueze raportul dintre laturi. Sinusul unghului $\widehat{B}$ se notează $\sin B$ şi este raportul dintre cateta opusă şi ipotenuză.

Prin urmare:

$$\sin B = \frac{cateta \quad opusa \quad unghiului \quad \widehat{B}}{ipotenuza} = \frac{b}{a}$$

Cosinusul unui unghi B se notează $\cos B$ şi este raportul dintre cateta alăturată unghiului B şi impotenuză.

$$\cos B = \frac{cateta \quad alaturata \quad unghiului \quad \widehat{B}}{ipotenuza} = \frac{c}{a}$$

Tangenta unghiului B se notează cu tgB şi este raportul dintre cateta opusă unghiului B şi cateta alăturată.

$$tgB = \frac{cateta \quad opusa \quad unghiului \quad \widehat{B}}{cateta \quad alaturata \quad unghiului \quad \widehat{B}} = \frac{b}{c}$$

Cotangenta unghiului B se notează prescurtat $ctgB$ şi este raportul dintre cateta alăturată unghiului B şi cateta opusă.

$$ctgB = \frac{cateta \quad alaturata \quad unghiului \quad \widehat{B}}{cateta \quad opusa \quad unghiului \quad \widehat{B}} = \frac{c}{b}$$

Ţinând seama de aceste definiţii obţinem:

$$\sin C = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a}$$

$$tgC = \frac{c}{b} \qquad ctgC = \frac{b}{c}$$

Relaţii între funcţiile trigonometrice ale aceluiaşi unghi

Formule fundamentale

$\sin B = \dfrac{b}{a}$

$\cos B = \dfrac{c}{a}$

Dacă împărţim membru cu membru aceste egalităţi se obţine

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}} = \frac{b}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{c} = \frac{b}{c} = tgB$$

Prin urmare obţinem relaţia:

$$tgB = \frac{\sin B}{\cos B}$$

Asemănător

$$ctgB = \frac{\cos B}{\sin B}.$$

Dacă se înmulţesc aceste două egalităţi membru cu membru se obţine relaţia:

$$tgB \cdot ctgB = \frac{\cancel{\sin B}}{\cancel{\cos B}} \cdot \frac{\cancel{\cos B}}{\cancel{\sin B}} = 1.$$

Prin urmare

$$ctgB = \frac{1}{tgB} \text{ (cotangenta este inversa tangentei).}$$

Să considerăm relaţiile:

$$\sin B = \frac{b}{a} \qquad \sin^2 B = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{sau}$$

$$\cos B = \frac{c}{a} \qquad \cos^2 B = \frac{c^2}{a^2}$$

Adunăm membru cu membru aceste două egalităţi şi obţinem:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Conform teoremei lui Pitagora aplicată în $\triangle ABC$ avem

$$b^2 + c^2 = a^2$$

(suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei)

Din relaţia lui Pitagora se obţine:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Prin urmare $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ (suma pătratelor sinusului şi cosinusului este egal cu 1).

Din relaţia fundamentală $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ şi obţinem:

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$$
$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B$$

Formule care exprimă sinusul cu ajutorul cosinusului şi cosinusul cu ajutorul sinusului.

<u>Exemple</u>: (Dacă se dă valoarea unei funcţii formulele fundamentale ne ajută să calculăm celelalte funcţii).

1. Se dă $\sin B = \frac{3}{5}$. Să se calculeze celelalte funcţii trigonometrice ale unghiului B.

Rezolvare:

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

Prin urmare:

$$\cos^2 B = \frac{16}{25}$$

$$\cos B = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

$$tgB = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{4} = \frac{3}{4}$$

$$ctgB = \frac{1}{tgB} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

2. Se dă $\cos x = \frac{1}{2}$. Să se calculeze celelalte funcţii trigonometrie.

Rezolvare:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \sqrt{3}$$

$$ctgx = \frac{1}{tgx} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exerciţii propuse:

1. Se dă $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se afle valoarea celorlalte funcţii trigonometrice ale unghiului x.
2. Se dă $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se afle celelalte funcţii trigonometrice ale unghiului x.
3. Se dă $\cos x = \frac{4}{5}$. Să se afle celelalte funcţii trigonometrice ale unghiului x.

Exprimarea funcţiilor trigonometrice ale unui unghiului x cu ajutorul tangentei unghiului x

Din formulele fundamentale avem:

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Prin ridicare la pătrat a ambilor membri ai acestei egalităţi se obţine:

$$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \text{ sau } \frac{tg^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Aplicăm proprietatea proporţiei (adunarea numitorilor la numărători cu păstrarea numitorilor neschimbaţi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$).

În cazul nostru avem:

$$\frac{tg^2 x + 1}{1} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \text{ sau } \frac{tg^2 x + 1}{1} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ sau}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}}$$

Din relaţia $tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ obţinem

$$\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\right)$$

Se obţine

$$\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{\sin^2 x}{1}$$

de unde

$$\sin^2 x(1+tg^2x)=tg^2x\Rightarrow\sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}$$

$$\sin x=\sqrt{\frac{tg^2x}{1+tg^2x}}=\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$$

<u>Exemplu</u>:

Se dă $tgx=\frac{3}{4}$. Să se afle valorile celorlalte funcţii trigonometrice.

Rezolvare:

$$ctgx=\frac{1}{tgx}=\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\sin x=\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{16}{1}+\frac{9}{16}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{16+9}{16}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{5}=\frac{3}{5}$$

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{16}{1}+\frac{9}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{16+9}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

Exerciţii propuse:

1. Se dă $tgx=1$. Să se afle valorile celorlalte funcţii trigonometrice.
2. Se dă $tgx=\sqrt{3}$. Să se afle valorile celorlalte funcţii trigonometrice.
3. Se dă $ctgx=\sqrt{3}$. Să se afle valorile celorlalte funcţii trigonometrice.

Identităţi trigonometrice

Se numeşte **identitate** o egalitate care este adevărată pentru orice valoare atribuită variabilelor.

Exemplu:

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Exerciţii rezolvate:

1. Să se verifice identitatea $\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{tg^2 x} = ctgx$.

Rezolvare:

Relaţia fundamentală a trigonometriei este:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Primul membru al egalităţii se scrie $\dfrac{1}{tg^2 x} = ctg^2 x$.

2. Să se verifice identitatea $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Rezolvare:

Primul membru al identităţii după aducerea la acelaşi numitor se scrie

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

3. Să se verifice identitatea $ctg^2 x \cdot \dfrac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}\left(1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 1$.

Rezolvare:

$$ctg^2 x \cdot \frac{tg^2 x}{1 + tg^2} \cdot \left(1 + tg^2 x\right) = ctg^2 x \cdot tg^2 x = \left(ctgx \cdot tgx\right)^2 = 1^2 = 1$$

(s-a aplicat relaţia $tgx \cdot tgx = 1$).

Exerciţii propuse:

Să se verifice identităţile:

1. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
2. $1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
3. $1 + ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.
4. $ctgx + tgx = \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}$.

Radicali

Se numeşte **radical de indice n dintr-un număr A** şi se notează $\sqrt[n]{A}$ un număr x care verifică relaţia $x^n = A$.

Prin urmare dacă $\sqrt[n]{A} = x$ atunci $x^n = A$.

<u>Exemple</u>:

1. $\sqrt[3]{8} = x \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow x = 2$ (dacă două puteri sunt egale şi au acelaşi exponent – în cazul nostru 3 – atunci au şi aceeaşi bază x=3). Prin urmare $\sqrt[3]{8} = 2$.
2. $\sqrt[4]{16} = x \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x^4 = 2^4 \Rightarrow x = 2$. Prin urmare $\sqrt[4]{16} = 2$.
3. $\sqrt[3]{27} = x; x^3 = 27 \Rightarrow x^3 = 3^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$.

Exerciţii propuse:

Să se calculeze:

1. $\sqrt[3]{125}$.
2. $\sqrt[4]{625}$.
3. $\sqrt[4]{81}$.

Observaţii:

- Dacă un radical are indicele 2 el nu se mai scrie adică $\sqrt[2]{4}$ se scrie $\sqrt{4}$.
- Dacă un radical are indicele 1 el este egal cu numărul de sub radical adică $\sqrt[1]{A} = x \Rightarrow x^1 = A \Rightarrow x = A$. Prin urmare $\sqrt[1]{A} = A$.

Operaţii cu radicali care au acelaşi indice

1. **Înmulţirea**

$$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A \cdot B}$$

Se scrie radicalul şi se înmulţesc expresiile de sub radical.

Demonstraţie:

$$\sqrt[3]{A} = x \Rightarrow x^3 = A$$
$$\sqrt[3]{B} = y \Rightarrow y^3 = B$$

Dacă înmulţim membru cu membru aceste egalităţi obţinem:

$$x^3 \cdot y^3 = A \cdot B$$

sau

$$(x \cdot y)^3 = A \cdot B$$

Conform definiţiei $x \cdot y = \sqrt[3]{A \cdot B}$ sau $\sqrt[3]{A \cdot B} = x \cdot y = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$.

Deci,

$$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A \cdot B} \text{ sau } \sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$$

Radicalul produsului este egal cu produsul radicalilor.

Exemple:

- $\sqrt[3]{x^7} \cdot \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^7 \cdot x^4} = \sqrt[3]{x^{11}}$
- $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$

2. **Împărţirea**

$$\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}} = \sqrt[3]{\frac{A}{B}} \qquad (1)$$

Se scrie radicalul o singură dată şi se împart expresiile de sub radical. Egalitatea (1) mai poate fi scrisă invers:

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$$

Exemplu:

Calculaţi $\frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt[4]{\frac{x^5}{x^3}} = \sqrt[4]{x^2}$

3. **Puterea unui radical**

$$\left(\sqrt[4]{A}\right)^p = \underbrace{\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{A} \cdot \cdots \cdot \sqrt[n]{A}}_{de \quad p \quad ori} = \sqrt[n]{\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{de \quad p \quad ori}} = \sqrt[n]{A^p}$$

Prin urmare obţinem: $\left(\sqrt[n]{A}\right)^p = \sqrt[n]{A^p}$.

Pentru a ridica un radical la o putere se scrie radicalul şi se ridică la acea putere expresia de sub radical.

Exemplu:

$$\left(\sqrt[3]{A^2}\right)^5 = \sqrt[3]{\left(A^2\right)^5} = \sqrt[3]{A^{10}}$$

4. **Extragerea unui radical din radical**

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[n \cdot m]{A}$$

Se scrie o singură dată radicalul şi se înmulţesc indicii.

Demonstraţie:

$$\sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{A}\right)} = x \Rightarrow x^n = \sqrt[m]{A}$$

Ridicăm ambii membri ai egalităţii la puterea m şi obţinem:

$$x^{n \cdot m} = \left(\sqrt[m]{A}\right)^m = \sqrt[m]{A^m} = A \Rightarrow x = \sqrt[n \cdot m]{A}$$

Prin urmare $\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[n \cdot m]{A}$.

Observaţii:

Dacă într-un radical indicele este egal cu puterea atunci el este egal cu expresia de sub radical adică $\sqrt[3]{A^3} = A$.

$$\sqrt[m]{A^m} = x \Rightarrow x^m = A^m \Rightarrow x = A$$

Prin urmare $\sqrt[m]{A^m} = A$.

<u>Exemple</u>: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{A^5}} = \sqrt[12]{A^5}$.

Exerciţii cu toate operaţiile învăţate

1. Să se calculeze: $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^4$.

Rezolvare:

Ordinea de efectuare a operaţiilor este: ridicarea la putere, înmulţirea sau împărţire. Prin urmare obţinem:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^4 = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^6}$$

2. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}$

Rezolvare:

Ţinând seama de ordinea operaţiilor obţinem:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5} = \frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^{10}}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{\sqrt[3]{x^{14}}}{\sqrt[3]{x^5}} = \sqrt[3]{\frac{x^{14}}{x^5}} = \sqrt[3]{x^{14-5}} = \sqrt[3]{x^9}$$

Exerciţii propuse: Să se calculeze:

1. $\left(\sqrt[3]{x}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$.
2. $\left(\sqrt{x}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{x}\right)^4$.
3. $\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[5]{x^3}\right)^4$
4. $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2$
5. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^7 \cdot \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x^4} \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^5}$
6. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{x}\right)^7 \cdot \left(\sqrt[5]{x^2}\right)^3}{\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^5}$

Adunarea radicalilor la acelaşi indice

Proprietăţi

P$_1$: *Valoarea unui radical nu se schimbă dacă înmulţim şi exponentul şi indicele cu aelaşi număr*: $\sqrt[n]{A^m}=\sqrt[n\cdot p]{A^{m\cdot p}}$.

Demonstraţie:

$$\sqrt[n]{A^m}=x\Rightarrow x^n=A^m \qquad (1)$$

$$\sqrt[n\cdot p]{A^{m\cdot p}}=y\Rightarrow y^{n\cdot p}=A^{m\cdot p}\Rightarrow\left(y^n\right)^p=\left(A^m\right)^p\Rightarrow y^n=A^m \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow x^n=y^n\Rightarrow x=y$. Prin urmare

$$\sqrt[n]{A^m}=\sqrt[n\cdot p]{A^{m\cdot p}}.$$

Exemple:

1. $\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3\cdot 3]{x^{2\cdot 3}}=\sqrt[9]{x^6}$ (amplificare cu 3).
2. $\sqrt[4]{x^5}=\sqrt[4\cdot 2]{x^{5\cdot 2}}=\sqrt[8]{x^{10}}$

P$_2$: *Valoarea unui radical nu se schimbă dacă împărâim indicele radicalului şi exponentul cu acelaşi număr*: $\sqrt[m\cdot p]{A^{n\cdot p}}=\sqrt[m]{A^n}$.

Exemplu:

$$\sqrt[4]{x^6}=\sqrt[2]{x^3}$$

$$\sqrt[8]{x^2}=\sqrt[4]{x}$$

$$\sqrt[3]{x^6}=\sqrt[1]{x^2}=x^2$$

Observaţii:

Orice număr poate fi scris ca un radical de orice indice.

$$A=\sqrt[3]{A^3}=\sqrt[4]{A^4}=\sqrt[5]{A^5}=\cdots=\sqrt[n]{A^n}$$

Operaţia de aducere a radicalilor la acelaşi indice:

Să considerăm radicalii: $\sqrt[3]{A};\sqrt[5]{A^2};\sqrt[6]{A^3}$. Cel mai mic multiplu comun al indicilor este $c.m.m.m.c.=30$.

Se amplifică pe rând radicalii cu un număr ce reprezintă câtul dintre $c.m.m.m.c.$ şi indicele fiecărui radical.

Primul radical se amplifică cu numărul $30:3=10$, al doilea radical se amplifică cu numărul $30:5=6$, al treilea radical se amplifică cu nmărul $30:6=5$.

$$^{10/}\sqrt[3]{A};\ ^{6/}\sqrt[5]{A^2};\ ^{5/}\sqrt[5]{A^3}$$

Obţinem:

$$\sqrt[30]{A^{10}};\sqrt[30]{A^{12}};\sqrt[30]{A^{15}}$$

Prin urmare pentru a aduce doi sau mai mulţi radicali la acelaşi indice se împarte multiplul comun al radicalilor la indicele fiecărui radical şicu numărul care reprezintă câtul se amplifică fiecare radical.

Exemplu:

Să se aducă la acelaşi indice radicalii:

$$\sqrt[5]{x^2};\sqrt[6]{x^7};\sqrt[4]{x^3}$$

$c.m.m.m.c.=60$

$$^{60:5=12/}\sqrt[5]{x^2};\ ^{60:6=10/}\sqrt[6]{x^7};\ ^{60:4=15/}\sqrt[4]{x^3}$$

Obţinem:

$$\sqrt[60]{x^{24}};\sqrt[60]{x^{70}};\sqrt[60]{x^{45}}\ .$$

Exerciţii propuse:

Să se aducă la acelaşi indice radicalii:

1. $\sqrt[3]{x};\sqrt[5]{x^2};\sqrt[10]{x^7}$
2. $\sqrt{x};\sqrt[8]{x^3};\sqrt[5]{x^2}$
3. $\sqrt[3]{x};\sqrt{x^5};\sqrt[5]{x^2}$
4. $\sqrt{x};\sqrt[5]{x^6};\sqrt[7]{x^3}$

Pentru a înmulţi sau a împărţi doi sau mai mulţi radicali care nu au acelaşi indice se aduc radicalii la acelaşi indice şi se înmulţesc sau împart expresiile de sub radical.

<u>Exemple</u>:

1. $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[8]{x^5}$

$c.m.m.m.c. = 24$

$${}^{12/}\sqrt{x}\cdot{}^{8/}\sqrt[3]{x^4}\cdot{}^{3/}\sqrt[8]{x^5}=\sqrt[24]{x^{12}}\cdot\sqrt[24]{x^{32}}\cdot\sqrt[24]{x^{15}}=\sqrt[24]{x^{12}\cdot x^{32}\cdot x^{15}}=\sqrt[24]{x^{12+32+15}}=\sqrt[24]{x^{49}}$$

2. $\dfrac{{}^{5/}\sqrt[3]{x^{19}}}{{}^{3/}\sqrt[5]{x^2}}=\dfrac{\sqrt[15]{x^{95}}}{\sqrt[15]{x^6}}=\sqrt[15]{\dfrac{x^{95}}{x^6}}=\sqrt[15]{x^{89}}$

Exerciţii propuse:

1. $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[9]{x^4}$
2. $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[6]{x^7}\cdot\sqrt{x^3}$
3. $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x}$
4. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^2}$

Scoaterea şi introducerea factorilor de sub radical

1. Introducerea unui factor de sub radical

Reamintim proprietatea că orice număr A poate fi scris ca un radical de orice indice $A=\sqrt[2]{A^2}\cdot\sqrt[3]{A^3}=\cdots=\sqrt[n]{A^n}$.

Să efectuăm produsul:

$$x\cdot\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x^n}\cdot\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x^n\cdot x^1}=\sqrt[n]{x^{n+1}}$$

Se ridică factorul la o putere egală cu indicele radicalului şi se înmulţeşte cu expresia de sub radical.

<u>Exemple</u>:

1. $x^2\cdot\sqrt[3]{x^5}=\sqrt[3]{\left(x^2\right)^3\cdot x^5}=\sqrt[3]{x^6\cdot x^5}=\sqrt[3]{x^{11}}$

2. $x^3 \cdot \sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5]{\left(x^3\right)^5 \cdot x^4} = \sqrt[5]{x^{15} \cdot x^4} = \sqrt[5]{x^{19}}$

Exerciţii propuse

Să se efectueze:

$x^2 \cdot \sqrt[5]{x}; x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}; x^5 \cdot \sqrt[4]{x^4}; x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

Scoaterea unui factor de sub radical

În exerciţiile care urmează vom aplica proprietatea:

Radicalul produsului este produsul radicalilor.

$$\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$$

Exemple:

1. $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$
2. $\sqrt[5]{x^{27}} = \sqrt[5]{x^{25} \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^{25}} \cdot \sqrt[5]{x^2} = x^5 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

Verificare:

$x^5 \cdot \sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{\left(x^5\right)^5 \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^{25} \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^{27}}$

În aceste exerciţii exponentul expresiei de sub radical a fost scris ca o sumă dintre un număr egal cu multiplul indicelui şi diferenţa faţă de exponent.

Exemplu:

$$\sqrt[4]{x^{19}}$$

Cel mai apropiat multiplu al numărului 4 faţă de exponentul 19 este numărul 16. Prin urmare vom scrie:

$$\sqrt[4]{x^{19}} = \sqrt[4]{x^{16} \cdot x^3} = \sqrt[4]{x^{16}} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3}$$

Verificare:

$$x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{\left(x^4\right)^4 \cdot x^3} = \sqrt[4]{x^{16} \cdot x^3} = \sqrt[4]{x^{19}}$$

Operaţia de introducere şi scoaterea factorului de sub radical sunt operaţii complementare.

Exemplu:

$$\sqrt[5]{x^{27}} = \sqrt[5]{x^{25} \cdot x^{2}} = \sqrt[5]{x^{25}} \cdot \sqrt[5]{x^{2}} = x^{5} \cdot \sqrt[5]{x^{2}}$$

Verificare:

$$x^{5} \cdot \sqrt[5]{x^{2}} = \sqrt[5]{x^{25} \cdot x^{2}} = \sqrt[5]{x^{27}}$$

Exerciţii propuse:

Se dau radicalii: $\sqrt[5]{x^{17}};\sqrt[6]{x^{38}};\sqrt[5]{x^{76}};\sqrt[4]{x^{13}};\sqrt[7]{x^{22}}$. Să se scoată factorii de sub radicali şi să se verifice folosind operaţia inversă (introducerea factorilor sub radicali)

Adunarea şi scăderea radicalilor

Se numesc **radicali asemenea** radicalii care au acelaşi indice şi aceeaşi expresie sub radical dar coeficienţi diferiţi.

Exemplu:

$3\sqrt[3]{a};-5\sqrt[3]{a};4\sqrt[3]{a}$ sunt radicali asemenea.

Pentru a aduna doi sau mai mulţii radicali care au acelaşi indice se scrie o singură dată radicalul şi se adună coeficienţii.

Exemple:

Să se calculeze:

1. $3\sqrt[5]{x^{2}} - 6\sqrt[5]{x^{2}} + 8\sqrt[5]{x^{2}} - 2\sqrt[5]{x^{2}} = (3-6+8-2)\sqrt[5]{x^{2}} = 3\sqrt[5]{x^{2}}$
2. $\sqrt{4a} + 3\sqrt{a} - 6\sqrt{a} = (2+3-6)\sqrt{a} = -\sqrt{a}$

Exerciţii propuse:

1. $\sqrt[3]{8a} - \sqrt[3]{27a} + \sqrt[3]{125a}$
2. $\sqrt[4]{16a} - \sqrt[4]{81a} + \sqrt[4]{a}$
3. $\sqrt[5]{32a} - \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{243a}$